הרצאה מספר 52
אלגברה 1 מ 104016
הנושא: מרחבי מכפלה פנימית
תהליך גרם־שמידט

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.24 דוגמה לקראת תהליך גרם־שמידט

- יהיו:

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$
$$v_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

- בדוק ש־ $\{v_1, v_2\}$ קבוצה א"נ יחסית למ"פ הסטנדרטית על $\mathbb{R}^3$.
- מצא וקטור $v_3 \in \mathbb{R}^3$ כך ש־ $\{v_1, v_2, v_3\}$ מהווה בסיס א"נ של $\mathbb{R}^3$.
- פתרון בלוח.
- תשובה: $v_3 = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.25 צעד בתהליך גרם־שמידט

- **טענה 12.16:** תהי $S=\{\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_m\}$ קבוצה אורתוגונלית סופית במ.מ.פ. V, $\vec{0}\notin S$. עבור $\vec{v}\in V$ נגדיר $\vec{u}=\vec{v}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\langle\vec{v},\vec{w}_i\rangle}{\|\vec{w}_i\|^2}\vec{w}_i$. אזי $\vec{u}\perp\vec{w}_j$ לכל j.
- **אבחנה:** אם $\vec{u}=\vec{0}$ אז $\vec{v}\in\mathrm{Span}(S)$.

- **מסקנה:** תהי $S=\{\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_m\}$ קבוצה אורתונורמלית סופית.

יהי $\vec{v}\notin\mathrm{Span}(S)$ ונגדיר $\vec{u}=\vec{v}-\sum_{i=1}^{m}\langle\vec{v},\vec{w}_i\rangle\vec{w}_i$.

אזי $S'=S\cup\left\{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\}$ היא גם קבוצה אורתונורמלית.

- **הוכחה:**
  - לפי ההנחה $\vec{v}\notin\mathrm{Span}(S)$ ולכן על סמך טענה 12.16 והאבחנה $\vec{u}\neq\vec{0}$, ומתקיים $\vec{u}\perp\vec{w}_j$ לכל j.
  - מכיון ש־ $\vec{u}\neq\vec{0}$ ניתן לנרמל את $\vec{u}$.
  - לכן S' קבוצה א"נ.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.25 צעד בתהליך גרם־שמידט

- מסקנה: תהי $S=\{\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_m\}$ קבוצה אורתונורמלית סופית.

  יהי $\vec{v}\notin \mathrm{Span}(S)$ ונגדיר $\vec{u}=\vec{v}-\sum_{i=1}^{m}\langle\vec{v},\vec{w}_i\rangle\vec{w}_i$.

  אזי $S'=S\cup\left\{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\}$ היא גם קבוצה אורתונורמלית.

- טענה (צעד בתהליך גרם־שמידט): תהי

  $B_k=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k,\vec{w}_{k+1},\dots,\vec{w}_n\}$ בסיס של מ.מ.פ. V

  כך ש־ $U_k=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k\}$ קבוצה אורתונורמלית.

  יהי $\vec{v}_{k+1}=\vec{w}_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\langle\vec{w}_{k+1},\vec{u}_i\rangle\vec{u}_i$. ויהי $\vec{u}_{k+1}=\frac{\vec{v}_{k+1}}{\|\vec{v}_{k+1}\|}$.

  אזי $B_{k+1}=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k,\vec{u}_{k+1},\vec{w}_{k+2},\dots,\vec{w}_n\}$

  בסיס של V כך ש־

  $U_{k+1}=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k,\vec{u}_{k+1}\}$ קבוצה אורתונורמלית,

  ו־ $\mathrm{Span}(U_{k+1})=\mathrm{Span}\left(U_k\cup\{\vec{w}_{k+1}\}\right)$.

- הוכחה: נובע מהמסקנה ־ יוסבר בע"פ.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.25 צעד בתהליך גרם־שמידט

- <u>טענה (צעד בתהליך גרם־שמידט):</u> תהי $B_k = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{w}_{k+1}, \ldots, \vec{w}_n\}$ בסיס של מ.מ.פ. V כך ש־ $U_k = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ קבוצה אורתונורמלית.

  יהי $\vec{v}_{k+1} = \vec{w}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{w}_{k+1}, \vec{u}_i \rangle \vec{u}_i$. ויהי $\vec{u}_{k+1} = \frac{\vec{v}_{k+1}}{\|\vec{v}_{k+1}\|}$.

  אזי $B_{k+1} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}, \vec{w}_{k+2}, \ldots, \vec{w}_n\}$ בסיס של V כך ש־ $U_{k+1} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}\}$ קבוצה אורתונורמלית,

  ו־ $\mathrm{Span}(U_{k+1}) = \mathrm{Span}\left(U_k \cup \{\vec{w}_{k+1}\}\right)$.

- <u>אבחנה 1:</u> $\vec{u}_{k+1} \in \mathrm{Span}\left(U_k \cup \{\vec{w}_{k+1}\}\right)$.
- <u>אבחנה 2:</u> אם $\vec{w}_{k+1} \perp \vec{u}_i$ עבור $i \leq k$

  אז $\vec{v}_{k+1} = \vec{w}_{k+1}$.
- <u>אבחנה 3:</u> אם $\vec{w}_{k+1} \perp \vec{u}_i$ עבור $i \leq k$ וכן $\|\vec{w}_{k+1}\| = 1$

  אז $\vec{u}_{k+1} = \vec{w}_{k+1}$

  ובמקרה זה $B_{k+1} = B_k$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.26 תהליך גרם־שמידט

- <u>טענה (צעד בתהליך גרם־שמידט):</u> תהי $B_k = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{w}_{k+1}, \ldots, \vec{w}_n\}$ בסיס של מ.מ.פ. V כך ש־ $U_k = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ קבוצה אורתונורמלית.

  יהי $\vec{v}_{k+1} = \vec{w}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{w}_{k+1}, \vec{u}_i \rangle \vec{u}_i$. ויהי $\vec{u}_{k+1} = \frac{\vec{v}_{k+1}}{\|\vec{v}_{k+1}\|}$.

  אזי $B_{k+1} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}, \vec{w}_{k+2}, \ldots, \vec{w}_n\}$ בסיס של V כך ש־ $U_{k+1} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}\}$ קבוצה אורתונורמלית,

  ו־ $\mathrm{Span}(U_{k+1}) = \mathrm{Span}\left(U_k \cup \{\vec{w}_{k+1}\}\right)$.

- <u>תהליך גרם־שמידט:</u>
  - הקלט: בסיס $B_0 = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ של מ.מ.פ. V.
  1. יהא $\vec{u}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}$, $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$.
  2. עבור $k = 1, 2, \ldots, n-1$ הפעל את הצעד שבטענה על מנת להגדיר את $\vec{u}_{k+1}$ ו־ B_{k+1}.
  - הפלט: בסיס אורתונורמלי $B_n = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ של V.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.26 תהליך גרם־שמידט

- <u>תהליך גרם־שמידט:</u>
  - הקלט: בסיס $B_0 = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ של מ.מ.פ. V.
    1. יהא $\vec{u}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}$, $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$.
    2. עבור $k = 1, 2, \ldots, n-1$ הפעל את הצעד שבטענה על מנת להגדיר את $\vec{u}_{k+1}$ ו־ B_{k+1}.
  - הפלט: בסיס אורתונורמלי $B_n = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ של V.

- <u>אבחנה 1:</u> $\vec{u}_{k+1} \in \mathrm{Span}\left(\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{k+1}\}\right)$.
- <u>אבחנה 2:</u> $\mathrm{Span}\left(\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}\right) = \mathrm{Span}\left(\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}\right)$.
- <u>אבחנה 3:</u> מטריצת המעבר $P_{B_0 \to B_n}$ היא משולשת עליונה.
- <u>אבחנה 4:</u> אם $\vec{w}_{k+1} \perp \vec{w}_i$ עבור $i \leq k$ ו־ $\|\vec{w}_{k+1}\| = 1$ אז $\vec{u}_{k+1} = \vec{w}_{k+1}$.
- <u>אבחנה 5:</u> אם $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ אורתונורמלי אז $\vec{u}_j = \vec{w}_j$ עבור $j \leq k$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.26 תהליך גרם־שמידט

- אבחנה 5: אם $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ אורתונורמלי
  אז $\vec{u}_j = \vec{w}_j$ עבור $j \leq k$.

- מסקנה: במ.מ.פ. נוצר סופית אפשר להרחיב קבוצה אורתונורמלי על מנת לקבל בסיס אורתונורמלי.
- הוכחה: הרחב את הקבוצה לבסיס, והפעל את תהליך גרם־שמידט, כאשר הקבוצה האורתונורמלי הנתונה מופיעה בתחילת הבסיס הסדור.
- מסקנה: לכל מ.מ.פ. נוצר סופית קיים בסיס אורתונורמלי.

- טענה: יהא W תת־מרחב של מ.מ.פ. נוצר סופית, V,
  ויהא $B_W = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ בסיס אורתונורמלי של W.
  אם $B_V = B_W \cup \{\vec{w}_{m+1}, \ldots, \vec{w}_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V
  אז $B' = \{\vec{w}_{m+1}, \ldots, \vec{w}_n\}$ הוא בסיס אורתונורמלי של $W^\perp$.
- הוכחה: כזכור $V = W \oplus W^\perp$, ולכל $k > m$ מתקיים $\vec{w}_k \in W^\perp$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.27 דוגמה של תהליך גרם־שמידט

- **דוגמה 1:** $V = \mathbb{R}_2[x]$ עם מ.פ. הסטנדרטית בקטע $[0,1]$.

$$B_0 = \{\vec{w}_1 = 1, \vec{w}_2 = x, \vec{w}_3 = x^2\}$$

$$\begin{aligned}
\|\vec{w}_1\|^2 &= \int_0^1 (1)^2\,dx = x\Big|_{x=0}^{1} = 1 \\
\vec{u}_1 &= \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} = 1 \\
\langle \vec{w}_2, \vec{u}_1 \rangle &= \int_0^1 (x)(1)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{1}{2} \\
\vec{w}_2 - \langle \vec{w}_2, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 &= x - \left(\frac{1}{2}\right)(1) = x - \frac{1}{2} \\
\|\vec{w}_2 - \langle \vec{w}_2, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1\|^2 &= \left\|x - \frac{1}{2}\right\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right)\Big|_{x=0}^{1} = \frac{4-6+3}{12} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.27 דוגמה של תהליך גרם־שמידט

- **דוגמה 1:** $V = \mathbb{R}_2[x]$ עם מ.פ. הסטנדרטית בקטע $[0,1]$.

$$B_0 = \{\vec{w}_1 = 1, \vec{w}_2 = x, \vec{w}_3 = x^2\}$$

$$\vec{u}_1 = 1$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{w}_2 - \langle \vec{w}_2, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{w}_2 - \langle \vec{w}_2, \vec{u}_1 \rangle\|} = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\,(2x-1)$$

$$\langle \vec{w}_3, \vec{u}_1 \rangle = \int_0^1 (x^2)(1)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$\langle \vec{w}_3, \vec{u}_2 \rangle = \int_0^1 (x^2)\left(\sqrt{3}\,(2x-1)\right)\,dx = \sqrt{3}\int_0^1 \left(2x^3 - x^2\right)\,dx$$

$$= \sqrt{3}\left(\left.\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{1}\right) = \sqrt{3}\cdot\left(\frac{3-2}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\vec{w}_3 - \langle \vec{w}_3, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{w}_3, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 = x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)(1) - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(\sqrt{3}\,(2x-1)\right)$$

$$= x^2 - x + \left(\frac{-2+3}{6}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.27 דוגמה של תהליך גרם־שמידט

- **דוגמה 1:** $V = \mathbb{R}_2[x]$ עם מ.פ. הסטנדרטית בקטע $[0,1]$.

$$\vec{u}_1 = 1 \qquad B_0 = \{\vec{w}_1 = 1, \vec{w}_2 = x, \vec{w}_3 = x^2\}$$

$$\vec{u}_2 = \sqrt{3}\,(2x-1)$$

$$\vec{w}_3 - \langle \vec{w}_3, \vec{u}_1\rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{w}_3, \vec{u}_2\rangle \vec{u}_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$\|\vec{w}_3 - \langle \vec{w}_3, \vec{u}_1\rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{w}_3, \vec{u}_2\rangle \vec{u}_2\|^2 = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{6x^2 - 6x + 1}{6}\right)^2 dx = \frac{1}{36}\int_0^1 \left(6x^2 - 6x + 1\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{36}\int_0^1 \left(36x^4 - 72x^3 + 48x^2 - 12x + 1\right) dx$$

$$= \frac{1}{36}\left(\frac{36x^5}{5} - 18x^4 + 16x^3 - 6x^2 + x\right)\Bigg|_{x=0}^{1} = \frac{1}{36}\left(\frac{36}{5} - 7\right) = \frac{1}{180}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{w}_3 - \langle \vec{w}_3, \vec{u}_1\rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{w}_3, \vec{u}_2\rangle \vec{u}_2}{\|\vec{w}_3 - \langle \vec{w}_3, \vec{u}_1\rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{w}_3, \vec{u}_2\rangle \vec{u}_2\|} = \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.27 דוגמה של תהליך גרם־שמידט

- **דוגמה 1:** $V = \mathbb{R}_2[x]$ **עם מ.פ. הסטנדרטית בקטע** $[0,1]$.

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \{\vec{w}_1 = 1, \vec{w}_2 = x, \vec{w}_3 = x^2\} \\
\vec{u}_1 &= 1 \\
\vec{u}_2 &= \sqrt{3}\,(2x-1) \\
\vec{u}_3 &= \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \\
&= \sqrt{180}\,(x^2 - x) + \sqrt{5} \\
B_3 &= \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}
\end{aligned}
$$

- **מטריצת המעבר היא:**

$$
P_{B_0 \to B_3} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{12} & -\sqrt{180} \\ 0 & 0 & \sqrt{180} \end{pmatrix}
$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.27 דוגמה של תהליך גרם־שמידט

- **דוגמה 2:** $V = \mathbb{R}^3$ עם מ.פ. הסטנדרטית.

$$B_0 = \{\vec{w}_1 = (1,1,1),\ \vec{w}_2 = (0,1,-1),\ \vec{w}_3 = (0,0,1)\}$$

1. הפעל את תהליך גרם־שמידט על B_0.
2. מצא את ווקטור הקואורדינטות של $v = (3,4,5)$ יחסית לבסיס B שהתקבל.

- פתרון בלוח.
- תשובה סופית:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) \\ u_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1) \\ [v]_B &= \left(4\sqrt{3},\ \frac{-1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות